Brojni redovi

Definicija 1. Neka je dat brojni niz $\{a_n\}$. Izraz

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ nazivamo brojnim redom.

Pri tome su brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ članovi reda, dok je a_n - opšti član reda.

Definicija 2 Sumu konačnog broja n-prvih članova reda nazivamo (n-tom) parcijalnom sumom reda.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

Definicija 3 Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, onda S nazivamo sumom reda i kažemo da je red konvergentan i pišemo da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Ako ne postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ili je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ to tada kažemo da je red divergentan.

Primjer Naći sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot q^n$, $a\neq 0$.

Rješenje

$$S_n = a\cdot q + a\cdot q^2 + aq^3+\cdots + a\cdot q^n =$$
$$= aq(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) =$$
$$=\begin{cases} n\cdot a, & q=1\\ a\cdot q\,\dfrac{q^n-1}{q-1}, & q\neq 1\end{cases}$$

1) $|q|<1$, to $q^n\to 0$, $n\to\infty$ i slijedi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\cdot q\,\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a\cdot q}{1-q}$$ red konvergira

2) $|q|>1$. Tada $|q|^n\to\infty$ kad $n\to\infty$ i tada $\dfrac{q^n-1}{q-1}\to\pm\infty$, $n\to\infty$

tj $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ red divergira

3) $q=1$ Tada red ima oblik $n\cdot a$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a)=+\infty$ red divergira

4) $q=-1$ $S_n=\begin{cases}0, & n\text{-parno}\\ -a, & n\text{-neparno}\end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - ne postoji $\Rightarrow$ red divergira

~~Teorema 1) Ako red konvergira, tada konvergira i red koji je dobije iz datog reda~~ kada se ~~izostavi~~ doda ili ~~doda~~ izostavi konačno mnogo članova

Teorema 1 Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dokaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - konvergira $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = S$

$$a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

Teorema 2 Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju ~~tada~~ sa sumama S_1 i S_2 tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ sa sumama $S_1 \pm S_2$ i cS_1.

Dokaz. $S_n^a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad S_n^b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$$S_n^+ = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = S_n^a + S_n^b$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = \lim_{n\to\infty} S_n^a + \lim_{n\to\infty} S_n^b = S_1 + S_2 \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Teorema 3. Dodavanjem ili izostavljanjem konačno mnogo članova konvergentnom redu dobija se konvergentan red.

Dokaz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ \lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots \qquad S'_{k+p} = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p} =$$
$$= S_{k+p} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) =$$
$$= \cancel{S_{k+p} - S_k}$$

$$\lim_{p\to\infty} S'_{k+p} = S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \text{ – red konvergentan.}$$

Definicija Za fiksirano n red $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ nazivamo ostatkom reda

Teorema 4. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$

Posljedica teoreme 1

Ako ~~n=1~~ opšti član reda ne teži nuli kad $n\to\infty$ red divergira.

Primjer Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$

ovaj red divergira

Uslov da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je potreban, ali ne i dovoljan uslov da red konvergira.

Primjer Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Teorema (Košijeva) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N \in \mathbb{N}$ takav ~~da važi~~ da za svako $n > N$ i svako $p > 0$ važi da je $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p > 0)\ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Primjer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ puta}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Znači $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$, ovo nije Košijev red $\Rightarrow$ divergira.

Redovi sa pozitivnim članovima

Posmatraćemo redove kod kojih je $a_n > 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Takve redove zovemo redovima sa pozitivnim članovima.

Teorema 1 Neka za svako $n > n_0$ važi da je $b_n \geq a_n > 0$ tada

a) Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira to i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

b) ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira to tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

i važi da je $S_n^a \leq S_n^b$.

Dokaz. Neka je $S_n^a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_n^b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \geq a_n > 0$

a) $\lim_{n\to\infty} S_n^b = S^b \Rightarrow \quad S_n^a \leq S_n^b \leq S^b$

Dokazali smo da je parcijalna suma S_n^a reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ograničena.
Pošto parcijalna suma ~~pozitivnog~~ reda sa pozitivnim članovima je rastuć niz tj $\{S_n^a\} \uparrow$, i ograničen je odozgo s $S^b \Rightarrow$ Niz $\{S_n^a\}$ je konvergentan tj postoji $\lim_{n\to\infty} S_n^a$ i očigledno je $\lim_{n\to\infty} S_n^a \leq S^b$.
Znači red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – divergira i $0 < a_n \leq b_n$.

Tada i suma $\sum S_n^a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ – divergira. Pri čemu je $\lim_{n\to\infty} S_n^a = +\infty$.
S_n^a rastuća fja, jer su a_n pozitivni, pa je
Pošto je $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^b \geq S_n^a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^b \geq \lim_{n\to\infty} S_n^a = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^b = +\infty$.

Primjer Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ konvergira.

Rješenje $\quad \frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$, $n \in N$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergira i suma je jednaka $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$. $\left(q = \frac{1}{2} < 1\right.$

Primjer Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira.

Rješenje $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, a red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Teorema 2 (Dalamberov kriterijum)

Neka je ~~za~~ $a_n > 0$ za svako $n \in N$ i neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$
tada a) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ~~u slučaju~~ kada je $l < 1$

b) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira kada je $l > 1$

(u slučaju kada je $l = 1$ teorema ne daje odgovor na pitanje konvergencije ili divergencije reda)

Dokaz. a) $l < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$,

$1 - l > 0$ Neka je $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$

Označimo sa $q = l + \varepsilon < 1$. Znači da postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq N$, $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon = q$ tj

$(\forall n \geq N)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ tj $a_{n+1} < q \cdot a_n$

~~Neka je $n = N+p$ $a_{N+p} < q\, a_{N+p-1} < q^2 a_{N+p-2} < \dots < q$~~

$$\left.\begin{array}{l} a_{N+1} < q\, a_N \\ a_{N+2} < q\, a_{N+1} < q^2 a_N \\ a_{N+3} < q\, a_{N+2} < q^3 a_N \\ \text{- - - - - -} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Razmatramo dva reda ~~$\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=N}^{\infty} q^n a_n$~~

$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n a_N$

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n a_N = a_N \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ je geometrijska progresija se $q < 1$ slijedi ovaj red konvergira. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$.

Kako je $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n a_N \Rightarrow$ red $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergira. Po Teoremi 3 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Δ

b) $l > 1$ Iz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ tj $\forall n \geq N$, $a_{n+1} > a_n$. Znači da članovi ovog reda počevši od $N \in \mathbb{N}$ rastu tj opšti član ne teži nuli $\Rightarrow \sum a_n$ divergira. Δ

Komentar Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ red divergira.

Primjer Ispitati konvergenciju redova

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

a) $a_n = \frac{1}{n!}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ $\Rightarrow$ a_n konv.

b) $a_n = \frac{2^n}{n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = 2 \cdot \frac{n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n}{n+1} = 2 > 1$

$\sum a_n$ - divergira.

Košijev kriterijum Teorema 3

Neka je $a_n > 0$ za svako $n \in N$ i neka postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Tada

a) $l < 1 \Rightarrow$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

b) $l > 1 \Rightarrow$ red —II— divergentan

(Za $l=1$ ne daje odgovor na pitanje konv. reda)

Dokaz. a) $l < 1$. Neka je q takvo da $l < q < 1$.

Počevši od nekog $N \in N$ imamo da je

$|\sqrt[n]{a_n} - l| < q - l$. Odavde slijedi da je $\sqrt[n]{a_n} < q$

tj. $a_n < q^n$, $\forall n \geq N$

Pošto je $q < 1$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

b) $l > 1$. Tada $\forall n \geq N$, $N \in N$ $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$ $\forall n \geq N. \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ tj. red divergira.

Primjer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Rješenje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ red konv

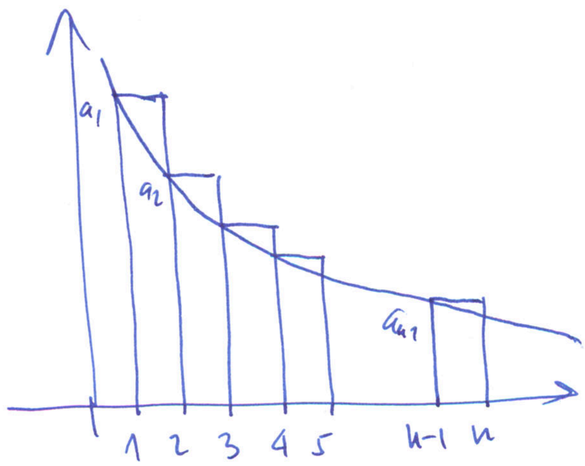
Teorema 4 (Košijev integralni kriterijum)

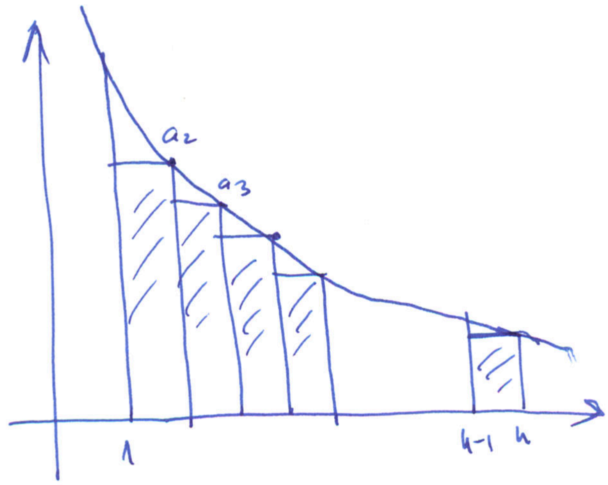
Neka je $f(x)$ pozitivna, neprekidna, monotono nerastuća funkcija na intervalu ~~od 1 do +∞~~ $[1, +\infty)$ i neka je $a_n = f(n)$.

Tada ako 1) nesvojstveni integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira to tada i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2) Ako pomenuti integral divergira to i red divergira.

Dokaz: Za fju $f(x)$ formiramo stepenaste figure koju čine opisani i upisani pravougaonici, tj





Površina opisane figure na intervalu $[1, n]$ je

$$P_o = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots + f(n-1)\cdot 1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

$$P_u = f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \dots + f(n)\cdot 1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Površina figure koju čine kriva $y = f(x)$ na intervalu $[1, n]$ je

$$P = \int_1^n f(x)\,dx.$$

Važi nejednakost

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x)\,dx < f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$$

Odnosno $S_n - \overset{f(1)}{a_1} < \int_1^n f(x)\,dx < S_n - \overset{f(n)}{a_n}$.

Ako $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira tj ako postoji $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = A$ tada je $\int_1^n f(x)\,dx < A$, jer je $f(x) > 0$ na $[1, +\infty)$. Iz činjenice da je $S_n < f(1) + A$ sledi da je parcijalna suma S_n ograničena $\Rightarrow \sum a_n$ konvergira.

Ako integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira tj $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = +\infty$ tada imamo da $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ tj $\sum a_n$ divergira.

Primer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ u zavisnosti od p.

Redovi sa članovima promjenljivog predznaka

Teorema (Lajbnic)

Neka je za svako $n \in \mathbb{N}$, $b_n > b_{n+1} > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ konvergira i pri tome važi da je njegova suma pozitivna i nije veća od prvog člana a_1.

Dokaz. $S_{2n} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2n-1} - b_{2n}) > 0$

S_{2n} je monotono rastući red jer je $b_{2k-1} - b_{2k} > 0$, $k = 1, 2, \dots$

~~S_{2n} je monotoni~~

$$S_{2n} = b_1 - [\underbrace{(b_2 - b_3)}_{>0} + \underbrace{(b_4 - b_5)}_{>0} + \dots + \underbrace{(b_{2n-2} - b_{2n-1})}_{>0} + \underbrace{b_{2n}}_{>0}] < b_1$$

$\Rightarrow$ S_{2n} je monotono rastući i ograničen odozgo niz $\Rightarrow$ S_{2n} je konvergentan niz tj. $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

$S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1}$. Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ imamo da je

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = S + 0 = S \Rightarrow$ Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

Primjer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$$\left.\begin{array}{l} b_n = \frac{1}{n} > 0, \; b_n = \frac{1}{n} \to 0, \; n \to \infty \\ b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; b_n \downarrow \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ konvergentan } \text{~~niz~~ Red}$$

Definicija Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira onda kažemo da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

Teorema Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira onda konvergira i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Dokaz $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = |S_{n+p}' - S_n'| = S_{n+p}' - S_n' < \varepsilon$$

Definicija Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira
onda kažemo da je red $\sum a_n$ uslovno konvergentan.

Teorema (Dirihle)

Neka je:

1) za svako $n \in \mathbb{N}$, $b_n > b_{n+1} \geq 0$
2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
3) Niz $S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ograničen

tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira

Teorema (Abel) Neka je

1) Niz $\{b_n\}$ monoton i ograničen
2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red

tada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira.

Primjer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira

Rješenje $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \qquad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

$S_n < 2 - \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} S_n \leq 2$ $\quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2}$

Primjer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{n^2}$

Rješenje $\left|\frac{\sin \alpha}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ - konv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin \alpha}{n^2}\right|$ konvergira $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{n^2}$ konv.